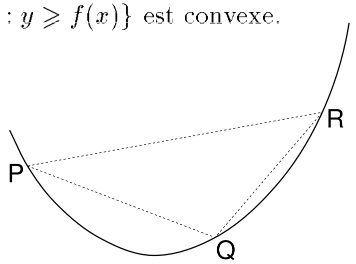
Analyse 20 — Fonctions convexes d'une variable réelle; applications.

1 Définition

Définition 1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite **convexe** si $\forall\, x, y \in I$, $\forall\, \lambda \in]0,1[$, $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.*

Géométriquement: si P, Q, R sont 3 points du graphe de f avec Q entre P et R, alors Q est au-dessous de la corde $[PR]$ (au sens large).
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant f(x)\}$ est convexe.



En termes de *pentes*: $\boxed{p(PQ) \leqslant p(PR) \leqslant p(QR)}$.

Exemples: fonctions affines, x^2, $-\log$, exp.

2 Propriétés

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. $I°$: intérieur de I.

Théorème 1 *Si $I = [a,b]$, alors f est majorée par $M = \max\{f(a), f(b)\}$ et minorée (par $2f(\frac{a+b}{2}) - M$).*

Théorème 2 *Pour tout $[a,b] \subset I°$, $f|_{[a,b]}$ est lipschitzienne. Par conséquent, f est continue sur $I°$.*

Contre-exemple: $f(a) = f(b) = 1$, et $f(x) = 0$ pour $a < x < b$.

Théorème 3 *Si f est convexe, f'_- et f'_+ existent et sont croissantes sur $I°$, et on a $f'_- \leqslant f'_+$.*

Exercice: pour k entier $\geqslant 1$, $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x).\cos kx.dx \geqslant 0$.

Théorème 4 *f' existe sauf sur un ensemble E au plus dénombrable et f' est continue sur $I° \backslash E$.*

3 Caractérisations

Soit I un intervalle ouvert, et $f : I \to \mathbb{R}$.

Théorème 5 *Supposons f dérivable. f est convexe ssi f' est croissante.*

Théorème 6 *Supposons f deux fois dérivable. f est convexe ssi $f'' \geqslant 0$.*

Théorème 7 *f est convexe ssi pour tout $x_0 \in I$, il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) + m(x - x_0) \leqslant f(x)$.*

$m \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$. Si f est dérivable, m est unique.

4 Stabilité par certaines opérations

Théorème 8 *L'ensemble des fonctions convexes sur I est stable par $+$, multiplication par un réel $\alpha \geqslant 0$, et passage à la limite si celle-ci existe.*

Définition 2 *On dit que f est **log-convexe** si $f > 0$ et $\log f$ est convexe.*

Exemple: $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.
Une fonction log-convexe est convexe.

Théorème 9 *L'ensemble des fonctions log-convexes sur I est stable par $+$, $\times$, et passage à la limite si celle-ci existe et est strictement positive.*

5 Fonctions midconvexes

Définition 3 *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite **midconvexe** si $\forall\, x, y \in I$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$.*

(ssi on a l'inégalité de Jensen avec coef. rationnels)

Théorème 10 *Si f est midconvexe et continue, f est convexe.*

Théorème 11 *Si f midconvexe est majorée sur un ensemble de mesure non nulle, alors f est continue, donc convexe.*

Théorème 12 *Si f est midconvexe et mesurable, alors f est continue, donc convexe.*

6 Applications: inégalités classiques

6.1 Inégalité de Jensen et ses applications

Inégalité de Jensen: si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe, $x_i \in I$, $\alpha_i > 0$ tels que $\sum_1^n \alpha_i = 1$, alors
$$f\left(\sum_1^n \alpha_i x_i\right) \leqslant \sum_1^n \alpha_i f(x_i).$$

Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, soient $x_i, y_i > 0$.

Inégalité arithmético-géométrique:
$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geqslant (x_1 \ldots x_n)^{1/n}.$$

Inégalité de Minkowski: si $p \geqslant 1$, alors
$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p\right)^{1/p}.$$
Application: permet de définir des normes dans $\mathbb{R}^n$.

Inégalité de Hölder: si $p, q > 0$ tels que $1/p + 1/q = 1$, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{1/q}$.
Application: comparaison des normes.

6.2 Inégalité de Karamata

Soit $\phi : I \to \mathbb{R}$ convexe continue, $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n$ et $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \cdots \geqslant y_n$ tels que $\forall\, k$, $\displaystyle\sum_{i=1}^k x_i \geqslant \sum_{i=1}^k y_i$, et $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$. Alors $\displaystyle\sum_{i=1}^n \phi(x_i) \geqslant \sum_{i=1}^n \phi(y_i)$.

Références

Roberts et Varberg: Convex Functions.
Beckenbach et Bellman: Inequalities.
Arnaudiès et Fraysse.
Ovaert: Analyse vol. 1.